II етап. Теоретичний тур. Завдання для Старшої групи

1. Зоряна система.

Подвійна зоряна система складається з червоного гіганта (M_1 = ⅓ $M_\odot$, R_1 = 20 $R_\odot$) та нейтронної зорі (M_2 = 2 $M_\odot$, $R_{нз}$ = 20 км). При якому періоді обертання в цій системі спостерігатиметься ефект акреції, якщо відстань між об’єктами становить L = 50 $R_\odot$? Величину $R_\odot$ прийняти рівною $7.0\cdot10^8$ м, а $M_\odot = 2.0\cdot10^{30}$ кг. Відповідь подати в СІ. ***(5 балів)***

Розв’язання:

1) Червоний гігант в подвійній системі обертатиметься навколо спільного центра мас по колу радіуса

$$r_1 = \frac{M_2 L}{M_1+M_2} = \frac{6}{7}L = \frac{300}{7}R_\odot.$$

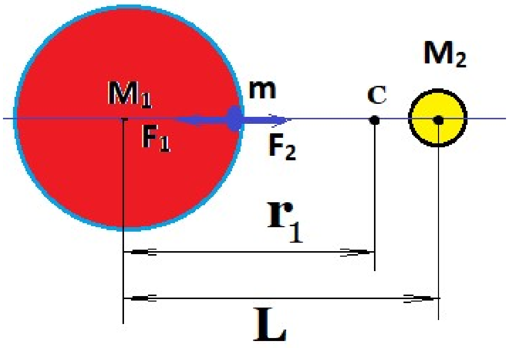
2) Початок акреції відбудеться з моменту, коли зовнішні шари зорі-гіганта сильніше притягуватимуться нейтронною зорею, ніж самим ядром червоного гіганта.

В граничному випадку:

$$F_2 - F_1 = ma_{доц}$$

$$\frac{GmM_2}{(L-R_1)^2} - \frac{GmM_1}{R_1^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\left(\frac{6}{7}L - R_1\right)$$

Звідки шукане значення періоду: $T \approx 1{,}3\cdot10^6$ с



Виконаємо оцінку швидкості руху червоного гіганта за умов даної задачі: $v_{чг} = 2\pi r_1/T$. Підстановка чисел дає значення швидкості меншу за швидкість світла.

Відповідь: Акреція почнеться з моменту, коли період подвійної зоряної системи дорівнюватиме $T \approx 1{,}3\cdot10^6$ с.

2. Ракета.

Із північного полюса деякого тіла Сонячної системи вертикально вгору злітає ракета з початковою швидкістю 360 м/с. Якої висоти над поверхнею досягне ракета без використання пального протягом подальшого руху?

Відомими є такі параметри згаданого тіла Сонячної системи: період обертання навколо власної осі 9.07 годин; відцентрове прискорення на екваторі 1.72 см/с^2; середня густина 2.16 г/см^3. Можемо вважати, що тіло є однорідною кулею. ***(10 балів)***

Розв’язання:

Відцентрове прискорення спричинене відцентровою силою інерції в системі відліку, пов’язаній із тілом, яке обертається. Для зручного його використання знайдемо кутову швидкість обертання навколо осі:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\cdot 3.142}{9.07\cdot 3.6\cdot 10^3\,\text{с}} = 1.92\cdot 10^{-4}\,\text{с}^{-1}$$

Тепер можливо визначити радіус тіла:

$$a_{відц} = \omega^2 R \Rightarrow R = \frac{a_{відц}}{\omega^2}$$

Таким чином,

$$R = \frac{1.72\cdot 10^{-2}\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{1.92^2\cdot 10^{-8}\,\text{с}^{-2}} = 467\,\text{км}$$

З огляду на задану густину, обчислимо масу:

$$M = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = 2.16\cdot 10^3\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\cdot\frac{4}{3}\cdot 3.142\cdot 4.67^3\cdot 10^{15}\,\text{м}^3 = 9.22\cdot 10^{20}\,\text{кг}$$

Застосуємо закон збереження механічної енергії для моменту запуску й довільного моменту польоту:

$$v_0^2 - \frac{2GM}{R} = v^2 - \frac{2GM}{R+h}$$

Ракета за описаних обставин рухається прямолінійно, і при досягненні максимальної висоти має нульову швидкість. Тоді:

$$R + h = \frac{2GM}{\frac{2GM}{R} - v_0^2} = \frac{R}{1 - \frac{v_0^2 R}{2GM}}$$

Звідси висота становить

$$h = R\left(\frac{1}{1 - \frac{v_0^2 R}{2GM}} - 1\right) = \frac{v_0^2 R^2}{2GM} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v_0^2 R}{2GM}}$$

Таку формулу зручно записати у вигляді:

$$h = \frac{R}{\frac{2GM}{v_0^2 R} - 1} = \frac{R}{\left(\frac{v_{II}}{v_0}\right)^2 - 1}$$

де введена друга космічна швидкість на поверхні,

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{м^3}{кг \cdot с^2} \cdot 9.22 \cdot 10^{20} кг}{4.67 \cdot 10^5 м}} = 513 \frac{м}{с}$$

Знайшовши другу космічну швидкість, можемо обчислити й висоту:

$$h = \frac{467 км}{\left(\frac{513}{360}\right)^2 - 1} = \frac{467 км}{1.03} = 4.53 \cdot 10^2 км$$

Зауважимо, що обчислена висота підйому лише на кілька відсотків менша за знайдений раніше радіус тіла. Таким чином, досягається відстань від центра, приблизно рівна подвоєному радіусу. Можемо відзначити, що задані в умові величини суттєво не відрізняються від параметрів Церери.

Відповідь:

$h = 4.53 \cdot 10^2 км$

3. Рій метеороїдів.

Екліптичні геоцентричні координати апексу рою метеороїдів – залишків комети – виправлені на орбітальний рух Землі та дорівнюють: λ = 57°18′; β = 47°38′. Афелій орбіт частинок рою знаходиться в хмарі Оорта. У період з 0 годин всесвітнього часу 9 липня до 24 години всесвітнього часу 17 липня спостерігається метеорний потік викликаний частинками рою. Визначте кут повороту радіанту метеорного потоку за час його дії. Прийміть, що орбіта Землі колова, видимий кутовий діаметр Сонця 32′, а вектори швидкості частинок рою поблизу орбіти Землі паралельні. Весняне рівнодення настає в 0 годин всесвітнього часу 21 березня. Відповідь подайте з точністю до десятих градуса.

Вам можуть знадобитись значення наступних констант:

1) гравітаційна стала G = $6{,}67 \times 10^{-11}$ Н×м²/кг²;

2) $R_{\odot}$ = 696 000 км;

3) $M_{\odot} = 2 \times 10^{30}$ кг. ***(20 балів)***

Розв’язання:

1а) Знайдемо координати антиапексу в геоцентричній екліптичній системі координат

$$A^{*}(237{,}3^{o};\ 227{,}6^{o}).$$

1б) Запишемо координати антиапексу в геоцентричній нормованій сферичній системі координат **Σ** осі якої співпадають з екліптичною геоцентричною системою координат. Маємо

$$A_{сф}(–0{,}3643;\ –0{,}5674;\ –0{,}7385). \qquad (1)$$

2) З умови знаходимо геліоцентричну відстань Землі

$$L_x \times 32 \times 60/206265 = 2 \times 696000,$$
$$L_x = 1{,}496 \times 10^{8} \text{ км}. \qquad (2)$$

3) З закону всесвітнього тяжіння знаходимо модуль геліоцентричної орбітальної швидкості Землі скориставшись результатом (2)

$$V_{\oplus} = \sqrt{\frac{G \times M_{\odot}}{Lx}} = 2{,}987 \times 10^{4} \text{ м/с..} \qquad (3)$$

4) Обчислимо кутову геліоцентричну швидкість Землі (рух Землі за умовою рівномірний), спираючись на результат (3)

$$\beta_{\oplus} = \frac{V}{2\pi Lx} \times 360^{o} = 1{,}1445 \times 10^{-5}\ {}^{o}/s = 0{,}9888\ {}^{o}/d. \qquad (4)$$

5) Знайдемо кут між одиничними тангенційними векторами до орбіти Землі, проведеними в точці її перетину з напрямком на точку весняного рівнодення (рис. 1) та в точках орбіти, в яких Земля перебуває в епохи початку та закінчення активності метеорного потоку

$$\alpha_1 = 110^{d} \times 0{,}9888\ {}^{o}/d = 108{,}77^{o};$$
$$\alpha_2 = 119^{d} \times 0{,}9888\ {}^{o}/d = 117{,}67^{o}. \qquad (5)$$

6) Запишемо значення нормованих координат вектора геліоцентричної швидкості Землі в системі координат **Σ** для моментів початку та закінчення дії метеорного потоку (див. (5))

$$V_{\oplus 1}(–0{,}3218;\ 0{,}9468;\ 0);$$
$$V_{\oplus 2}(–0{,}4614;\ 0{,}8857;\ 0). \qquad (6)$$

7) Кути між нормованими векторами швидкості орбітального руху Землі (переносна швидкість) та метеороїдів (абсолютна швидкість) (рис. 2) в системі **Σ,** з урахуванням результатів (1) та (6)

$$\cos\gamma_1 = (–0,3643)\times(–0,3218) +(–0,5674)\times0,9468 = –0,4197;$$
$$\cos\gamma_2 = (–0,3643)\times(–0,4614) +(–0,5674)\times0,8857 = –0,3337;$$

звідси

$$\gamma_1 = 114,82^o,$$
$$\gamma_2 = 109,47^o. \qquad (7)$$

8) За умовою афелій орбіт метеороїдів знаходиться в хмарі Оорта, тобто на дуже великій відстані від Сонця у порівнянні з геліоцентричною відстанню Землі, тому ми можемо прийняти, що поблизу орбіти Землі модулі швидкості частинок рою співпадають з параболічною геліоцентричною швидкістю для Землі. Отже, маємо

$$V_{мет} = V\infty = \sqrt{2}V_{\oplus} = 42,243 \text{ км/с}. \qquad (8)$$

9) Знайдемо модулі відносної швидкості метеороїдів рою в системі **Σ** для дат, що відповідають початку та закінченню активності метеорного потоку

$$V_{в1} = \sqrt{29,87^2+42,243^2+2\times29,87\times42,243\times0,4197} \approx 61,12 \text{ км/с};$$
$$V_{в2} = \sqrt{29,87^2+42,243^2+2\times29,87\times42,243\times0,3337} \approx 59,32 \text{ км/с}.$$

10) Нарешті, знайдемо кути між векторами геліоцентричної орбітальної швидкості Землі та відносної швидкості метеороїдів для дат, що відповідають початку та закінченню активності метеорного потоку (рис. 3)

$$\frac{61,12}{\sin\gamma_1} = \frac{42,243}{\sin\zeta_1},$$

$$\frac{59,32}{\sin\gamma_2} = \frac{42,243}{\sin\zeta_2}.$$

Підставляючи в останні рівності значення кутів з (7), знаходимо

$$\zeta_1 \approx 38,85^o;$$
$$\zeta_2 \approx 42,18^o,$$

звідси

$$\Delta\zeta \approx 3,3^o.$$

***Відповідь*: ≈ 3,3º.**

ІЛЮСТРАЦІЇ

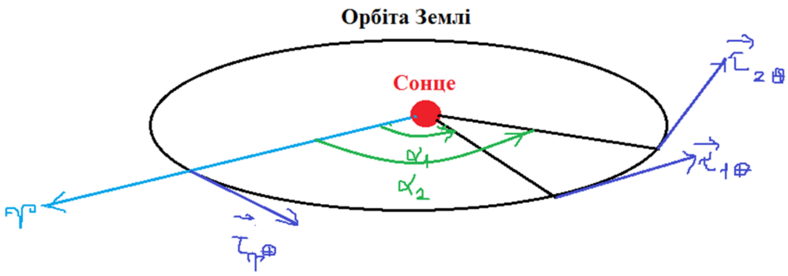
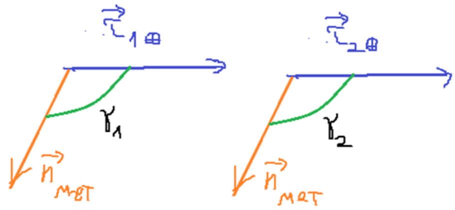
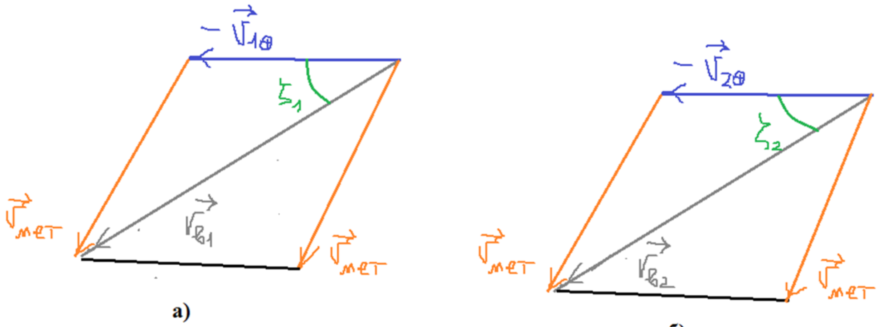


Рис. 1.



а) **б)**

Рис. 2.



а) **б)**

Рис. 3.